

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ  
ВЯЗКО-УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ  
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Э.Т.КИЯСБЕЙЛИ, С.Р.КУРМЫШОВА, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА

*НИИ Прикладной Математики  
Бакинского Государственного Университета*

*В работе исследуется предельное состояние сжатых многослойных стержней, реологическое поведение которых записывается посредством линейных соотношений наследственной теории упругости, которая достаточно хорошо описывает поведение полимерных материалов, армированных пластиков и даже металлов при умеренных напряжениях.*

*При постановке технических задач могут иметь место разнообразные виды закреплений, что приводит к необходимости формулировок различных краевых условий на торцах стержня.*

*В этой связи данная статья преследует цель выявить влияние краевых условий, соответствующих жесткому и комбинированному заземлению на критическое время устойчивости. Поставленные в работе задачи решаются вариационным методом смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца.*

**1. Вывод вариационного уравнения.** Введем в рассмотрение прямоугольный в плане стержень длиной  $l$  и толщиной  $2h$ . Теперь перейдем к описанию математической модели стержня. Для этого предположим, что он составлен из  $s$  чередующихся различных по толщине слоев с различными модулями упругости  $E_{k+1}$  и функциями ползучести  $D_{k+1}\{(t-\tau), \sigma(\tau)\} [k = 0, 1, \dots, (s-1)]$ , которые в дальнейшем будем считать линейными относительно напряжения  $\sigma$ :

$$D_{k+1}\{(t-\tau), \sigma(\tau)\} = F'_{k+1}(t-\tau)\sigma(\tau),$$

где штрих означает дифференцирование по  $t-\tau$ .

При этом полагаем, что раздел слоев осуществляется параллельно боковым граням стержня. Толщину каждого слоя обозначим через  $\delta_k (k = 1, 2, \dots, s)$ . Таким образом,

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_s = 2h$$

есть полная толщина стержня. Условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении. Из этого следует равенство на них перемещений, напряжения и отсутствие взаимного давления слоев. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезами плоских сечений Кирхгофа-Лява, при которых вышеуказанные допущения выполняются автоматически. При сделанных оговорках

стержень можно считать монолитным и тем самым записать физическое уравнение для пакета в целом в виде одного равенства

$$\dot{\varepsilon}^\Phi = \frac{\sigma}{E_{k+1}} + \int_0^t F'_{k+1}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad a_k \leq z \leq a_{k+1}. \quad (1.1)$$

Здесь

$$a_k = -h + \sum_{i=0}^s \delta_i, \quad (1.2)$$

а  $\delta_0$  принимается равным нулю. Для дальнейших целей конкретизируем вид функции ползучести, задав ее в экспоненциальной форме

$$F'_{k+1}(t-\tau) = \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} e^{-\alpha(t-\tau)},$$

где  $A_{k+1}$  - коэффициент ползучести, а показатель ползучести  $\alpha$  одинаков для всех слоев пакета.

Рассмотрим теперь задачу об устойчивости выбранного нами сжатого силой  $N$  стержня. Для ее решения воспользуемся вариационным методом смешанного типа [1]. Введем в плоскости изгиба стержня декартовую систему координат с началом в точке  $z = 0$  и направим ось  $x$  вдоль его длины. В этом случае взяв одно измерение стержня равно единице, принимая нелинейность только прогиба  $w$  и не учитывая явление укорочения стержня, используемый функционал, с учетом гипотезы плоских сечений, запишем в виде [1, 2, 3]:

$$R = \int_0^l \left\{ \dot{N}(\dot{u}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x}) + M\dot{w}_{,xx} + \frac{1}{2}N\dot{w}_{,x}^2 \right\} dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\varepsilon}^\Phi \dot{\sigma} dz dx + \quad (1.3)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} dz dx - \dot{N}[u(l) - u(0)] + (Nw_{,x})' \dot{w} \Big|_0^l + M\dot{w}_{,x} \Big|_0^l - M_{,x}\dot{w} \Big|_0^l.$$

Здесь дополнительно приняты обычные обозначения:  $u$  - продольное смещение, а  $M$  - изгибающий момент. Запятая означает дифференцирование по  $x$ , а под точкой понимается дифференцирование по физическому времени  $t$ .

Для завершения математической постановки задачи необходимо записать краевые условия. В случае жесткого защемления обоих концов имеем (рис. 1):

$$w(0) = w(l) = 0; \quad w_{,x}(0) = w_{,x}(l) = 0; \quad (1.4)$$

$$M(0) \neq 0; \quad M(l) \neq 0.$$

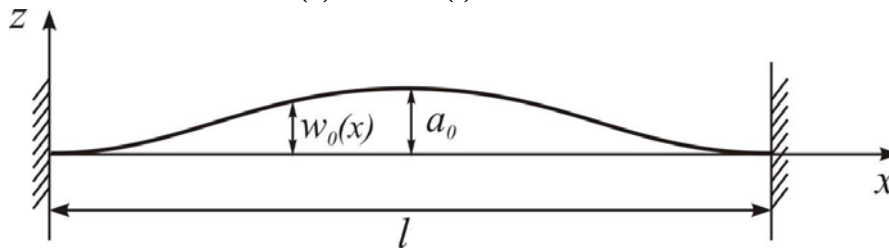


Рис. 1. Форма начального несовершенства при жестком защемлении.

Далее, не умоляя общности, положим, что при  $x = l$  стержень жестко защемлен, а при  $x = 0$  осуществляется шарнирное опирание (рис.2). Тогда соответствующие краевые

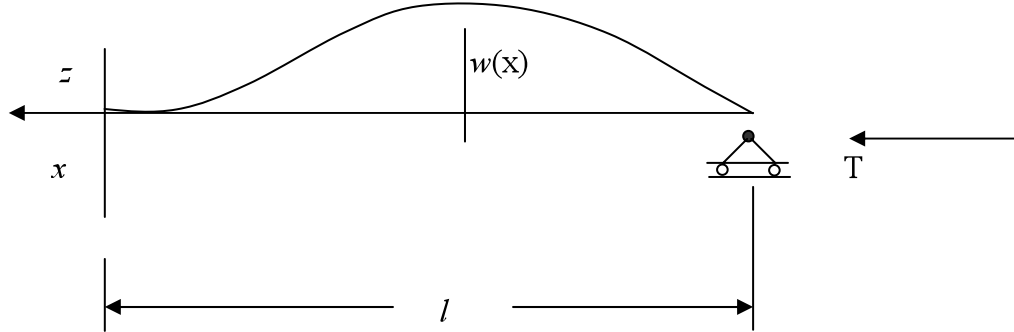


Рис. 2. Форма начального несовершенства при комбинированном защемлении.

условия примут вид:

$$\begin{aligned} w(l) = 0; \quad w_{,x}(l) = 0; \quad M(l) \neq 0; \\ w(0) = 0; \quad M(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

При шарнирном опирании обоих концов

$$w(0) = w(l) = 0; \quad M(0) = M(l) = 0. \quad (1.6)$$

Последний вариант для одномерной аппроксимации вида  $\sin \frac{\pi x}{l}$  исследован в [2].

Легко убедиться, что вследствие граничных условий (1.4)-(1.6), последние три слагаемые в (1.3) тождественно обращаются в нуль. Тогда функционал перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} R = \int_0^l \left\{ \dot{N}(\dot{u}_{,x} + w_{,x}\dot{w}_{,x}) + M\dot{w}_{,xx} + \frac{1}{2}N\dot{w}_{,x}^2 \right\} dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\varepsilon}^\Phi \dot{\sigma} dz dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} dz dx - \dot{N}[u(l) - u(0)]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При решении задачи устойчивости будем считать  $N = const = -T$ , и потому соответствующие члены в (1.7) выпадают. Следовательно

$$R = \int_0^l \left\{ M\dot{w}_{,xx} - \frac{T}{2}w_{,x}^2 \right\} dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} dz dx + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\dot{\sigma}^2}{E_{k+1}} dz dx. \quad (1.8)$$

Из (1.1) для  $\dot{\varepsilon}^\Phi$  запишем:

$$\dot{\varepsilon}^\Phi = \frac{1}{E_{k+1}} \left\{ \dot{\sigma} + A_{k+1} \left[ \sigma - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получаем

$$\begin{aligned}
R = & \int_0^l M \dot{w}_{,xx} dx - \frac{T}{2} \int_0^l \dot{w}_{,x}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma}^2 dz dx - \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \sigma \dot{\sigma} dz dx + \\
& + \alpha \int_0^l \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \dot{\sigma} \left\{ \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right\} dz dx.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

**2. Случай жесткого защемления обоих концов.** Поясним идею анализа устойчивости многослойного линейно вязко-упругого стержня, когда оба конца жестко защемлены. Тогда в соответствии с методом Релея-Ритца необходимо задать формы изгиба и момента. В качестве первых собственных функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.4), имеем: [3]

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= a(t) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \pi \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \\
M(x, t) &= b(t) \cos \frac{\pi x}{l} \cos \pi \left( 1 - \frac{x}{l} \right),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

или после дифференцирования по  $t$

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{a} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \pi \left( 1 - \frac{x}{l} \right), \\
\dot{M} &= \dot{b} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \pi \left( 1 - \frac{x}{l} \right),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $\dot{a}$  и  $\dot{b}$  - независимые варьируемые функциональные аргументы. При использовании вариационного метода одним из центральных вопросов является выбор аппроксимирующей функции для закона распределения напряжений по толщине. Примем его линейным, т.е.

$$\sigma = -\frac{T}{2h} + \frac{3M}{2h^3} z \quad \text{или} \quad \dot{\sigma} = \frac{3\dot{M}}{2h^3} z. \tag{2.3}$$

Обоснованность такого подхода и оценка его точности для многослойных стержней даны в [4]. Подставляя (2.1)-(2.3) в выражение функционала (1.10), после интегрирования получим аналитическое представление функционала

$$\begin{aligned}
R = & -\frac{\pi^2}{2l} \dot{a} \dot{b} - \frac{\pi^2 T}{4l} \dot{a}^2 - \frac{27l}{64h^6} \eta_2 \dot{b}^2 - \frac{3lT}{8h^4} \gamma_1 \dot{b} - \frac{27l}{32h^6} \gamma_2 b \dot{b} + \\
& + \frac{3lT}{8h^4} \gamma_1 e^{-\alpha t} \dot{b} + \alpha \frac{27l}{32h^6} \gamma_2 \dot{b} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

для которого справедливы следующие обозначения:

$$\eta_2 = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^2 dz, \quad \gamma_j = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{A_{k+1}}{E_{k+1}} \int_{a_k}^{a_{k+1}} z^j dz \quad (j = 1, 2). \tag{2.5}$$

Выражение (2.5) значительно упростится, если принять, что раздел слоев симметричен относительно срединной поверхности стержня. Из этого вытекает, что  $\gamma_1 = 0$  и следовательно можно записать

$$R = -\frac{\pi^2}{2l} \dot{a}\dot{b} - \frac{\pi^2 T}{4l} \dot{a}^2 - \frac{27l}{64h^6} \eta_2 \dot{b}^2 - \frac{27l}{32h^6} \gamma_2 b\dot{b} + \alpha \frac{27l}{32h^6} \gamma_2 \dot{b} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau.$$

Условие стационарности данного функционала, приводит к равенству нулю выражений:

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{a}} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{b}} = 0,$$

откуда получаем следующую систему уравнений:

$$\dot{b} = -T\dot{a} \quad \text{или} \quad b = -Ta,$$

$$-\frac{\pi^2}{l} \dot{a} - \frac{27l}{16h^6} \eta_2 \dot{b} - \frac{27l}{16h^6} \gamma_2 b + \alpha \frac{27l}{16h^6} \gamma_2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau = 0.$$

Комбинируя эти уравнения, получим:

$$\dot{a} \left( -\pi^2 + \frac{27l^2}{16h^6} T\eta_2 \right) + \frac{27l^2}{16h^6} T\gamma_2 a - \alpha \frac{27l^2}{16h^6} T\gamma_2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} a(\tau) d\tau = 0.$$

Введя следующие безразмерные величины

$$\omega = \frac{T}{T_{кр}} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{h},$$

в которых, согласно [3],

$$T_{кр} = \frac{16}{27} \pi^2 \frac{h^6}{l^2} \eta_2^{-1}$$

- критическая сила для неоднородного по толщине жестко заземленного линейно-упругого стержня, последнее уравнение приводится к виду:

$$\dot{y} - \frac{\gamma_2}{\eta_2} \frac{\omega}{1-\omega} \left\{ y - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right\} = 0. \quad (2.6)$$

Отметим, что дальнейшее рассмотрение вопроса об определении критического времени устойчивости имеет физический смысл, когда действующая нагрузка меньше критической, т.е.  $\omega < 1$ . Если наконец учесть формулу дифференцирования под знаком интеграла

$$\left\{ \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right\}' = y - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau$$

и учесть ее в (2.6), получим:

$$\left\{ y(t) - \frac{\gamma_2}{\eta_2} \frac{\omega}{1-\omega} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right\}' = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$y(t) - \frac{\gamma_2}{\eta_2} \frac{\omega}{1-\omega} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau = C, \quad (2.7)$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Ее необходимо определить из начального условия при  $t = 0$ . Отсюда имеем:

$$C = y(0) = y_0.$$

Величина  $y_0$  представляет значение прогиба, определяемого немедленно после приложения нагрузки. Так как мгновенная деформация линейно упругая, то для ее определения воспользуемся формулой [3]

$$\frac{dT}{da} = - \left( \frac{\pi^2}{2l} - \frac{27T}{32h^6} \eta_2 \right) / \frac{27}{32h^6} \eta_2.$$

Разделяя здесь переменные и учитывая введенные выше безразмерные величины, запишем

$$y_0 = \frac{y_0^v}{1 - \omega}, \quad (2.8)$$

где  $y_0^v$  - задаваемый начальный эксцентриситет стержня. Приняв

$$\frac{\gamma_2}{\eta_2} \frac{\omega}{1 - \omega} = \beta,$$

(2.7) перепишем следующим образом:

$$y(t) - \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau = y_0. \quad (2.9)$$

Далее введя обозначения

$$\alpha - \frac{\gamma_2}{\eta_2} \frac{\omega}{1 - \omega} = \lambda, \quad \text{а} \quad \beta - \alpha = -\lambda$$

можно сразу записать решение интегрального уравнения (2.9) [5]

$$y(t) = y_0 \left\{ 1 + \beta \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right\}.$$

Вычисляя соответствующий интеграл, получим:

$$y(t) = \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\} y_0. \quad (2.10)$$

Из формулы (2.10) следует, что в зависимости от знака  $\lambda$  возможны три варианта [2]. Если  $\lambda \leq 0$ , то наблюдается неограниченный рост прогиба во времени. Причем для  $\lambda < 0$  этот рост имеет экспоненциальный характер, а для  $\lambda = 0$  - линейный. Если же  $\lambda > 0$ , то наблюдается ограниченный рост прогиба, причем его предельное значение определяется соотношением

$$y_* = y_0 \frac{\alpha}{\lambda} \quad \left( \frac{\alpha}{\lambda} > 1 \right).$$

**3. Случай комбинированного защемления.** Пусть теперь осуществляется случай комбинированного защемления. Тогда, следуя [3], аппроксимирующие функции для прогиба  $w$  и момента  $M$ , удовлетворяющие соответствующим граничным условиям (1.5), представим следующим образом:

$$w(x, t) = a(t) \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right),$$

$$M(x, t) = b(t) \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right).$$

В результате процедуры, выполненной аналогично предыдущей, получим:

$$\dot{a} \left( -\pi^2 + \frac{45l^2}{16h^6} T\eta_2 \right) + \frac{45l^2}{16h^6} T\gamma_2 a - \alpha \frac{45l^2}{16h^6} T\gamma_2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} a(\tau) d\tau = 0.$$

Обозначив через

$$\omega = \frac{T}{T_{кр}}, \quad y = \frac{a}{h},$$

предыдущее уравнение представим в виде:

$$\dot{y} - \frac{\gamma_2}{\eta_2} \frac{\omega}{1-\omega} \left\{ y - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} y(\tau) d\tau \right\} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь в качестве  $T_{кр}$  принимается значение критической силы для комбинированного случая закрепления, которое определяется по формуле:

$$T_{кр} = \frac{16}{45} \pi^2 \frac{h^6}{l^2} \eta_2^{-1}.$$

Теперь не представляет труда записать решение (3.1), которое имеет вид:

$$y(t) = \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\} y_0, \quad (3.2)$$

где

$$y_0 = \frac{y_0^v}{1-\omega}. \quad (3.3)$$

Чисто визуальная идентичность полученных решений вполне объяснима проведенным обезразмериванием  $\omega = T/T_{кр}$ , так как в обоих случаях критическая сила выбирается из решения соответствующей линейно-упругой задачи. Поэтому здесь вопрос необходимо формулировать следующим образом: задавать такие значения  $\omega$ , которые соответствуют одному и тому же значению  $T$ . Очевидно, что тогда численные значения мгновенных прогибов также будут различными.

Принимая  $\omega_1 = 0,3$ , что заимствовано из [2], где исследован случай шарнирного опирания, из предыдущих рассуждений имеем следующую цепочку равенств:

$$0,3T_{кр}^{(1)} = \omega_2 T_{кр}^{(2)} = \omega_3 T_{кр}^{(3)},$$

в которой

$$T_{кр}^{(1)} = \frac{2}{3} \pi^2 \frac{h^6}{l^2} \eta_2^{-1}, \quad T_{кр}^{(2)} = \frac{16}{27} \pi^2 \frac{h^6}{l^2} \eta_2^{-1}, \quad T_{кр}^{(3)} = \frac{16}{45} \pi^2 \frac{h^6}{l^2} \eta_2^{-1}.$$

Здесь верхние и нижние индексы соответствуют различным видам закреплений, а именно: (1)-шарнир, (2)-жесткое, (3)-комбинированное. Отсюда имеем:

$$\omega_2 \approx 0,563, \quad \omega_3 \approx 0,338.$$

**4. Численный расчет и выводы.** Для численного анализа ограничимся случаем  $\lambda < 0$ . Приведенные выше решения в принципе применимы при любых значениях времени  $t$ . Однако большие прогибы в стержнях, являющихся элементами конструкций, недопустимы сами по себе. Поэтому разумно ограничить время службы стержня  $t_{кр}$  условием достижения прогибом некоторой величины, фиксированной из тех или иных соображений, например  $\tilde{y} = 1$ . Это соответствует безразмерному прогибу, равному половине толщины. Согласно отмеченному, находим:

$$1 = y_0 \left\{ \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) e^{-\lambda t_{кр}} + \frac{\alpha}{\lambda} \right\},$$

откуда для  $t_{кр}$  запишем:

$$t_{кр} = -\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\lambda - \alpha y_0}{\lambda y_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right)} \right|. \quad (4.1)$$

В качестве примера рассмотрим поведение трехслойного стержня, обладающего следующей периодической структурой:

$$E_1 = E_3, \quad \delta_1 = \delta_2, \quad A_1 = A_3.$$

Введем дополнительные обозначения:

$$E = \frac{E_1}{E_2}, \quad \mu = \frac{A_2}{A_1}, \quad k = \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Исходя из этого по формулам для  $a_k$  имеем:

$$a_0 = -h, \quad a_1 = -\frac{\delta_2}{2}, \quad a_2 = \frac{\delta_2}{2}, \quad a_3 = h.$$

Отмеченное выше позволяет определить отношение  $\gamma_2/\eta_2$ , которое принимает вид:

$$\frac{\gamma_2}{\eta_2} = A_1 \frac{1 + 1,5k + 0,75k^2 + 0,125E\mu k^3}{1 + 1,5k + 0,75k^2 + 0,125Ek^3}.$$

Теперь представим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенной выше зависимости (4.1). Приняв  $y_0^v = 10^{-1}$ ,  $A_1 = 0,5 \frac{1}{сек}$ , в таблице 1

**Таблица 1**

$\omega$	0,3	0,563	0,338
$y_0$	0,14	0,23	0,15

приведены численные значения мгновенного прогиба, соответствующие одной и той же сжимающей силе  $T$ .

На графиках рисунка 3 представлены кривые зависимости  $t_{кр}$  от  $E$ ,  $\mu$  и  $k$ . Отсюда можно сделать следующие выводы:

\* критическое время при шарнирном опирании больше, чем при комбинированном и жестком защемлении;

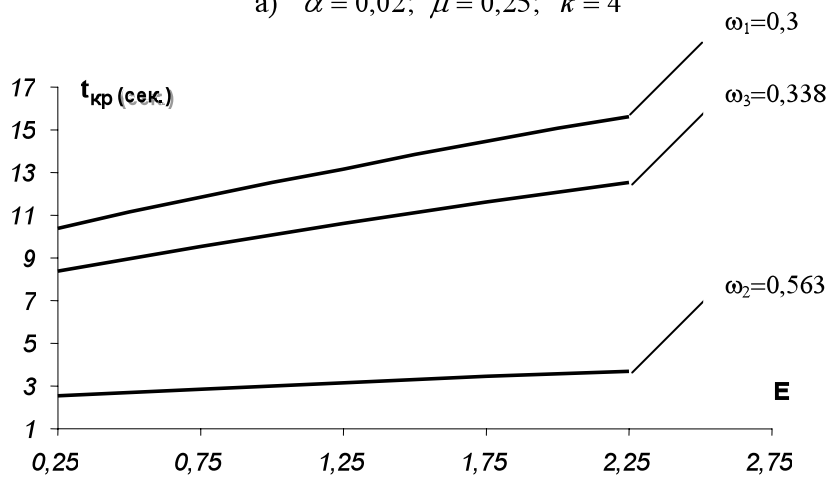
\* увеличение отношения модулей упругости ( $E$ ) существенно увеличивает критическое время устойчивости;

\* в зависимости от  $k$  (с его увеличением) наблюдается увеличение значений критического времени;

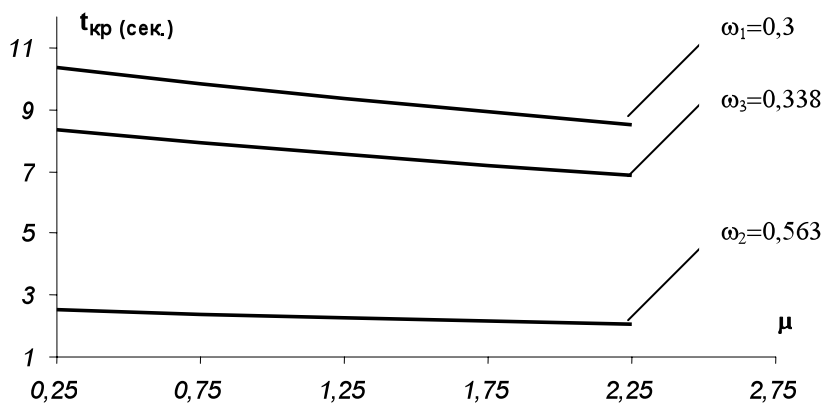
\* обратная картина наблюдается в зависимости от  $\mu$ .

Отметим, что для однородного стержня  $t_{кр} = 9,59 \text{ сек}$  при шарнирном опирании,  $t_{кр} = 7,74 \text{ сек}$  при комбинированном защемлении и  $t_{кр} = 2,32 \text{ сек}$  для жесткого защемления.

а)  $\alpha = 0,02$ ;  $\mu = 0,25$ ;  $k = 4$



б)  $\alpha = 0,02$ ;  $E = 0,25$ ;  $k = 4$



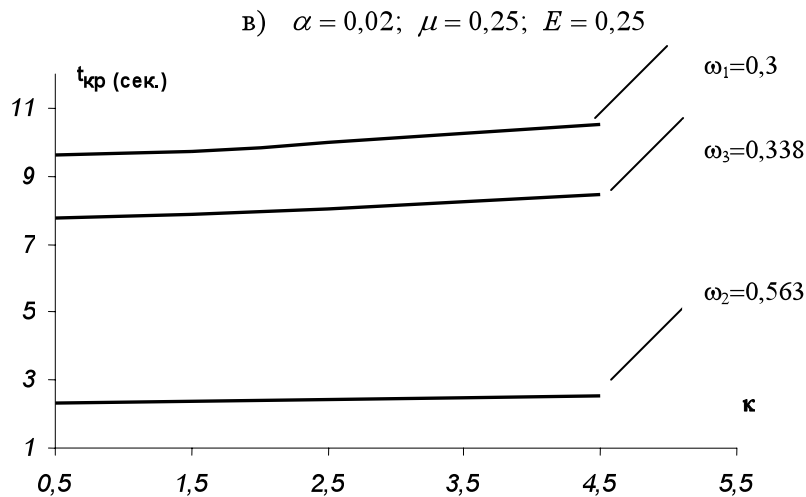


Рис. 3. Зависимость критического времени от параметров  $E$  - а),  $\mu$  - б),  $k$  - в).

Таким образом, конструированием неоднородности можно увеличить (или уменьшить) критическое время устойчивости и тем самым, в определенном смысле, оптимизировать процесс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б. Вариационный метод механики гетерогенных нелинейно вязко-упругих твердых тел. Доклады РАН, 2006, т.410, № 1, с.45-48.
2. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б. Предельное состояние и несущая способность тел и конструкций. Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева «Механика предельного состояния», г. Чебоксары, 2007 г., с.10-17.
3. Абдуллаев Ф.А., Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. Устойчивость многослойных стержней при различных видах закреплений. Вестник БГУ, № 1, 2001, с.131-141.
4. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней. ДАН Азербайджана, 2000, № 4-6, с.72-77.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., Наука, 1977, 383 с.

#### MÜXTƏLİF SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ DAXİLİNDƏ ÇOXLAYLI, ÖZLÜ-ELASTİK ÇUBUQLARIN DAYANIQLIĞI HAQQINDA

E.T.QIYASBƏYLİ, S.R.KURMIŞOVA, L.F.FƏTULLAYEVA

#### XÜLASƏ

Baxılan işdə sıxılmış çoxlaylı çubuqların son hədd vəziyyəti tədqiq olunur. Bu çubuqların reoloji özünü aparması irsi elastiklik nəzəriyyəsinin xətti ifadələri vasitəsilə yazılır. Orta gərginlik zamanı polimer materialların, armaturlu lövhələrin və hətta metalların özünü aparmasını elastiklik nəzəriyyəsi kifayət qədər yaxşı təsvir edir.

Texniki məsələlərin qoyuluşunda çubuğun uclarının bağlanması müxtəlif şəkili növləri ola bilər. Bu isə çubuğun uclarında müxtəlif sərhəd şərtlərinin verilməsinin vacibliyinə əsas verir.

Bununla əlaqədar olaraq, təqdim olunan məqalə bərk və kombinasiya olunmuş bağlanmaya uyğun olan sərhəd şərtlərinin dayanıqlığın böhran zamanına təsirini öyrənmək məqsədini güdür. Baxılan işdə qoyulmuş məsələlər Reley-Rits üsulunun köməyi ilə qarışıq tipli variasiya üsulu vasitəsilə həll olunur.

## **ABOUT STABILITY OF MULTILAYER VISCO-ELASTIC RODS FOR THE DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS**

**E.T. KIYASBEYLI, S.R. KURMISHOVA, L.F. FATULLAYEVA**

### **SUMMARY**

In activity the limiting condition of oblate multilayer rods is studied, the reological behaviour which one enters the name by means of linear ratio of a inheritable theory of elastic strength, which one well enough describes behaviour of polymer stuffs, reinforced plastics and even of metals at moderate tension.

At statement of technical problems the miscellaneous kinds of fastening can take place, that results in necessity of the formulations of different boundary conditions at butt ends of a rod.

In this connection given article pursues the objective to reveal influencing boundary conditions conforming to rigid and combined pinches on critical time of stability. The problems, put in activity, are decided by a variational method of a blended type in combination to a method Reley-Rits.